RIESZ空間における正値線形作用素の表現定理 (バナッハ空間の構造の研究とその応用)

AUTHOR(S):
河邊, 淳; 天野, 雄介

数理解析研究所講究録 1399 巻 2004 年 15-22

RIESZ 空間における正値線形作用素の表現定理

信州大学・工学部 河邊 淳 * (Jun Kawabe)
天野 雄介 (Yusuke Amano)
Faculty of Engineering, Shinshu University

概要. コンパクト空間 X 上の実数値連続関数全体から成る Riesz 空間 $C(X)$ から Dedekind 完備な Riesz 空間 V への正値線形作用素 $T: C(X) \to V$ の V-値 σ-測度による表現定理として知られる J.D.M. Wright の結果が, T に緊密性の条件を課すことにより, X が一般の完全正則空間の場合でも成り立つことを報告する.

1. 序論

X は Hausdorff 空間, V は Dedekind 完備 Riesz 空間とする. X の Borel 集合から成る σ-集合体を $\mathcal{B}(X)$ で表す. 有限加法的な集合関数 $\mu: \mathcal{B}(X) \to V$ は, 互いに素な集合から成る任意の列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(X)$ に対して $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$ を満たすとき, X 上の V-値 σ-測度と呼ばれる. Riesz 空間 V 上に任意の上に有界な単調増加列がその上限に収束するような Hausdorff 線形位相が存在する場合には, V-値 σ-測度は位相的に定義された可算加法性をもつ通常のベクトル測度と一致し, その性質についてはすでにかなり研究されている: Diestel & Uhl [3], Dinculeanu [4], Kluvánek & Knowles [9] などを見よ. しかし, このような性質をもつ Hausdorff 線形位相が一つもない Riesz 空間が存在する: Floyd [5].

J.D.M. Wright [12, 14] は, コンパクト空間 X 上の実数値連続関数全体から成る Riesz 空間 $C(X)$ から Dedekind 完備な Riesz 空間 V への正値線形作用素 $T: C(X) \to V$ が, V-値 σ-測度の積分として表現できること (Riesz-Markov-Kakutani 型の表現定理) を示した. 著者は位相空間上のベクトル測度及びその測度の弱収束性の研究を続けているが, 無限次元空間上でベクトル測度の理論を展開するには, 考察する測度が定義された空間が (局所) コンパクト空間では不十分で, 一般の距離空間や完全正則空間上での理論展開が必要となる: 例えば, Boccuto & Sambucini [2], [6, 7, 8] を見よ. それゆえ, Wright の結果を X が完全正則空間の場合に拡張することが不可欠である.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 28B15; Secondary 28C15, 46G10.
Key words and phrases. Dedekind complete Riesz space, positive linear operator, σ-measure, tightness condition, quasi-Radonness, representation theorem.
*Research supported by Grant-in-Aid for General Scientific Research No. 15540162, the Ministry of Education, Science, Sports and Culture, Japan.

この論文では，正値線形作用素に緊密性の条件を課すことにより，Wright の表現定理は X が一般の完全正則空間の場合でも成り立つことを報告する．

第 2 章では，Riesz 空間や Riesz 空間値測度に関する基本事項をまとめる．上で述べた結果は第 3 章で与えられる．

2. 記号と準備

この論文で扱う位相空間はすべて Hausdorff の分離公理を満たしているとする．実数全体を $\mathbb{R}$ で，自然数全体を $\mathbb{N}$ で表す．この章では，Riesz 空間に関する基本的な事実を復習したあとで，Riesz 空間値測度の正則性の定義及びその性質をまとめる．

2.1. Riesz 空間. 任意の上に有界な空でない集合が上限をもつ Riesz 空間は **Dedekind 完備**であるという．Dedekind 完備な Riesz 空間は Archimedean である: Zaanen [16, Theorem 12.3].

V を Riesz 空間とし，$V^+ := \{u \in V : u \geq 0\}$ とおく．与えられた有向点列 (net) $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma} \subset V$ と $u \in V$ に対して，$\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ が単調減少で $\inf_{\alpha\in\Gamma} u_\alpha = u$ となるとき，u_α は u に**単調減少収束する**といい，$u_\alpha \downarrow u$ とかく．単調増加収束 $u_\alpha \uparrow u$ も同様に定義される．有向点列 $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ が u に**順序収束する**とは，0 に単調減少収束する有向点列 $\{p_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma} \subset V$ が存在して，任意の $\alpha \in \Gamma$ に対して $|u - u_\alpha| \leq p_\alpha$ が成り立つことである．このとき，$u_\alpha \xrightarrow{o} u$ または $\lim_{\alpha\in\Gamma} u_\alpha = u$ などとかく．

点列の順序収束のもつ性質は [16, Lemma 10.1 and Theorem 10.2] にまとめられているが，これと同様な性質は有向点列に対しても適当な修正を施せば成立する．詳しくは [8, Proposition 1] を見よ．

Riesz 空間の要素から成る有向点列に対して上極限，下極限の概念を定義することができる．$\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ は Dedekind 完備な Riesz 空間 V の要素から成る有向点列とする．各 $\beta \in \Gamma$ に対して，上限 $x_\beta := \sup_{\alpha\geq\beta} u_\alpha$ が存在して，有向点列 $\{x_\beta\}_{\beta\in\Gamma}$ は下に有界かつ単調減少となる．それゆえ，V の Dedekind 完備性より，V の要素 x が存在して，$x_\beta \downarrow x$ が成り立つ．この x を有向点列 $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ の**上極限**といい，$x := \limsup u_\alpha$ とかく．同様に**下極限** $y := \liminf u_\alpha$ が定義できる．ただし，各 $\beta \in \Gamma$ に対して，$y_\beta := \inf_{\alpha\geq\beta} u_\alpha$ で，$y_\beta \uparrow y$ とする．

Riesz 空間の有向点列に対する上極限，下極限は，$\mathbb{R}$ の有向点列に対するものと同様の性質をもつ．詳細な解説については [8, Proposition 2] を見よ．

Dedekind 完備な Riesz 空間 V の正の要素 $e \in V$ に対して，e によって生成された主イデアルを V_e とかく．すなわち，$V_e := \{u \in V : |u| \leq re \text{ for some } r \in \mathbb{R} \text{ with } r > 0\}$. このとき，$V_e$ は順序ノルム $\|u\|_e := \inf\{r > 0 : |u| \leq re\}$ に関して順序単位元 e をもつ AM-空間となる．それゆえ，Kakutani-Krein の定理 (Schaefer [11, Theorem II.7.4]) より，適当なコンパクト Hausdorff 空間 S が存在して，V_e は S 上の実数値連

続関数全体から成る Banach 束 $C(S)$ と束同型かつ等距離同型となる．V は Dedekind 完備なので，V_e も Dedekind 完備．それゆえ，S は Stonean，すなわち，S の任意の開集合の閉包は開集合となる [11, Corollary to Proposition II.7.7]．Riesz 空間に関する詳細な情報は，Aliprantis & Burkinshaw [1] や Luxemburg & Zaanen [10] を見よ．

2.2. Riesz 空間値 σ-測度．X は位相空間とする．X の Borel 集合から成る σ-集合体を $\mathcal{B}(X)$ で表す．すなわち，$\mathcal{B}(X)$ は X の開部分集合全体から生成された σ-集合体である．X 上の実数値有界連続関数から成る Banach 束を $C(X)$ で表し，その束ノルムを $\|f\| := \sup_{x\in X} |f(x)|$ とかく．

V は Dedekind 完備 Riesz 空間とする．有限加法的な正値集合関数 $\mu : \mathcal{B}(X) \to V$ は，$\mathcal{B}(X)$ の互いに素な集合から成る任意の列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$ を満たすとき，X 上の **V-値 σ-測度**という．この論文では，正値測度だけを対象としていることを注意しておく．スカラー値測度の場合と同様に，任意の σ-測度は単調列的連続性をもつ．すなわち，$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(X)$ が単調増加列ならば $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$，単調減少列ならば $\mu(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ が成り立つ．

実数値可測関数の Riesz 空間値 σ-測度に関する積分概念は，Wright [12, 14] で与えられ，その積分に対して単調収束定理，Fatou の補題，優収束定理などが成り立つことが示されている．

2.3. σ-測度の正則性．位相空間上の測度の理論を展開するには，スカラー値測度の場合と同様に，Riesz 空間値測度に対して正則性の概念を導入する必要がある．以下では，X は位相空間，V は Dedekind 完備 Riesz 空間とする．

定義 2.1. μ は X 上の V-値 σ-測度とする．

(i) μ が**擬正則** (quasi-regular) であるとは，任意の開集合 $G \subset X$ に対して

$$\mu(G) = \sup\{\mu(F) : F \subset G \text{ and } F \text{ is closed}\}$$

が成り立つことである．

(ii) μ が**擬ラドン** (quasi-Radon) であるとは，任意の開集合 $G \subset X$ に対して

$$\mu(G) = \sup\{\mu(K) : K \subset G \text{ and } K \text{ is compact}\}$$

が成り立つことであり，特に上の条件が $G = X$ の場合にだけ成り立つとき，μ は**緊密** (tight) であるという．

(iii) μ が **τ-正則** (τ-smooth) であるとは，X の開集合から成る任意の単調増加有向集合列 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ に対して $G = \cup_{\alpha\in\Gamma} G_\alpha$ とおくと，$\mu(G) = \sup_{\alpha\in\Gamma} \mu(G_\alpha)$ が成り立つことである．

注意 2.2. 正則な σ-測度やラドン σ-測度の概念はスカラー値測度の場合と同様に定義される．しかし，この論文ではこれらの概念は必要としないので，その定義の記述は省略する．

補題 2.3. μ は X 上の V-値 σ-測度とする．

(i) μ が擬正則であるための必要十分条件は，任意の開集合 $G \subset X$ に対して，0 に単調減少収束する有向点列 $\{p_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma} \subset V$ と $F_\alpha \subset G$ を満たす X の閉集合から成る有向集合列 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ が存在して，任意のの $\alpha \in \Gamma$ に対して $\mu(G-F_\alpha) \le p_\alpha$ が成り立つことである．

(ii) μ が擬ラドンであるための必要十分条件は，任意の開集合 $G \subset X$ に対して，0 に単調減少収束する有向点列 $\{p_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma} \subset V$ と $K_\alpha \subset G$ を満たす X のコンパクト集合から成る有向集合列 $\{K_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ が存在して，任意の $\alpha \in \Gamma$ に対して $\mu(G - K_\alpha) \le p_\alpha$ が成り立つことである

(iii) μ が緊密であるための必要十分条件は，0 に単調減少収束する有向点列 $\{p_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma} \subset V$ と X のコンパクト集合から成る有向集合列 $\{K_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ が存在して，任意の $\alpha \in \Gamma$ に対して $\mu(X - K_\alpha) \le p_\alpha$ が成り立つことである

さらに，上の有向集合列 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ と $\{K_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ は単調増加であるように選べる．

補題 2.4. μ は X 上の V-値 σ-測度とする．このとき，次の 2 つの条件は同値．

(i) μ は緊密かつ擬正則.

(ii) μ は擬ラドン.

補題 2.5. X 上の擬ラドン V-値 σ-測度は τ-正則である．

次の結果はスカラー値測度の場合と同様の方法で証明できる．詳しくは，[7, Proposition 4] を見よ．

命題 2.6. μ は X 上の τ-正則な V-値 σ-測度とする．$\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ は X 上で定義された下半連続な実数値関数から成る単調増加有向関数列で一様有界とする．各 $x \in X$ に対して $f(x) = \sup_{\alpha\in\Gamma} f_\alpha(x)$ とおくと，f は μ-可積分で

$$\int_X f d\mu = \lim_{\alpha\in\Gamma} \int_X f_\alpha d\mu = \sup_{\alpha\in\Gamma} \int_X f_\alpha d\mu$$

が成り立つ．

次の補題は正値線形作用素の表現定理における表現測度の一意性を証明する際に必要となる．第 3 章の定理 3.4 を見よ．

補題 2.7. μ と ν は完全正則空間 X 上の τ-正則な V-値 σ-測度とする．任意の $f \in C(X)$ に対して $\int_X f d\mu = \int_X f d\nu$ が成り立つならば，μ と ν は $\mathcal{B}(X)$ 上で一致する．

$\mathbb{N}$から$\mathbb{N}$への写像全体をΘで表す．Dedekind完備Riesz空間Vは，任意の$i, j \in \mathbb{N}$に対して$q_{i,j} \geq q_{i,j+1}$で，任意の$i \in \mathbb{N}$に対して$\inf_{j\in\mathbb{N}} q_{i,j} = 0$となる順序有界な2重点列$\{q_{i,j}\} \subset V$に対して，$\inf_{\theta\in\Theta} \sup_{i\in\mathbb{N}} q_{i,\theta(i)} = 0$が成り立つとき，**弱$\sigma$-分配的**であるという．補題2.4と[8, Theorem 3]から，Dedekind完備Riesz空間Vが弱σ-分配的であれば，完備可分距離空間上のすべてのV-値σ-測度は擬ラドンとなることがわかる．

3. 正値線形作用素の表現定理

Xは位相空間，VはDedekind完備Riesz空間とする．X上で定義された有界な実数値Borel可測関数全体から成るBanach束を$B(X)$で表し，その束ノルムを$\|f\| := \sup_{x\in X} |f(x)|$とかく．この章では，$C(X)$から$V$への正値線形作用素に対してRiesz-Markov-Kakutani型の表現定理が成り立つための必要十分条件(緊密性の条件)を与える．まず，命題4.1 [12]をXが必ずしもコンパクトではない場合に拡張しておく．

命題 3.1. Xは完全正則空間，Yはコンパクト空間とする．$T : C(X) \to C(Y)$は正値線形作用素で，0に単調減少収束する有向点列$\{p_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma} \subset C(Y)$と$X$のコンパクト集合から成る有向集合列$\{K_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$が存在して，任意の$\alpha \in \Gamma$と$f(K_\alpha) = \{0\}$及び$0 \leq f \leq 1$を満たす任意の$f \in C(X)$に対して$T(f) \leq p_\alpha$が成り立つと仮定する．さらに，$N := \{y \in Y : \inf_{\alpha\in\Gamma} p_\alpha(y) > 0\}$とおく．このとき，次の(i)–(iv)を満たす写像$\tilde{T} : B(X) \to B(Y)$が存在する．

(i) $\tilde{T}$は正値かつ線形．
(ii) 任意の$f \in C(X)$と任意の$y \notin N$に対して$\tilde{T}(f)(y) = T(f)(y)$．
(iii) 一様有界な$B(X)$の関数列$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$がfに各点収束すれば，$f \in B(X)$で，任意の$y \in Y$に対して$\tilde{T}(f)(y) = \lim_{n\to\infty} \tilde{T}(f_n)(y)$．
(iv) 下半連続なX上の実数値関数fに対して，任意の$y \notin N$で

$$\tilde{T}(f)(y) = \sup\{T(g)(y) : 0 \leq g \leq f,\ g \in C(X)\}.$$

それゆえ，$\tilde{T}(f)$は$Y - N$上で下半連続．

SをコンパクトStonean空間とし，$\mathcal{M}$でSのすべてのmeagre Borel集合から成るσ-イデアルを表す．κは次の条件を満たすS上の$C(S)$-値σ-測度とする:

(κ1) $\mathcal{M}$はκの核であり，
(κ2) Sの各開かつ閉集合Aに対して$\kappa(A) = \chi_A$．

ただし，χ_Aは集合Aの定義関数である．このようなκは実際に存在し[12, page 118]，S上の**Birkhoff-Ulam $C(S)$-値σ-測度**という．

次の補題はすでに[12]で与えられている．

補題 3.2. κ は S 上の Birkhoff-Ulam $C(S)$-値 σ-測度とする．このとき，すべての $f \in C(S)$ に対して $\int_S f d\kappa = f$ が成り立つ．

命題 3.1 より，我々は次の定義に自然に到達する．

定義 3.3. X は位相空間，V は Riesz 空間とする．正値線形作用素 $T : C(X) \to V$ が**緊密性の条件を満たす**とは，0 に単調減少収束する有向点列 $\{p_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma} \subset V$ と X のコンパクト集合から成る有向集合列 $\{K_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ が存在して，任意の $\alpha \in \Gamma$ と $f(K_\alpha) = \{0\}$ 及び $0 \leq f \leq 1$ を満たす任意の $f \in C(X)$ に対して $T(f) \leq p_\alpha$ が成り立つことである．

以上の準備の下で，Dedekind 完備 Riesz 空間に値をとる正値線形作用素に対して Riesz-Markov-Kakutani 型の表現定理を与えることができる．

定理 3.4. X は完全正則空間，V は Dedekind 完備 Riesz 空間で，$T : C(X) \to V$ は正値線形作用素とする．このとき，次の 2 つの条件は同値．

(i) T は緊密性の条件を満たす．

(ii) X 上の擬ラドン V-値 σ-測度 μ が存在して，すべての $f \in C(X)$ に対して

$$T(f) = \int_X f d\mu$$

が成り立つ．

さらに，この μ は上の表現式と擬ラドン性により一意的に定まる．

証明の概略を与えておこう．(ii) $\Rightarrow$ (i) は μ の擬ラドン性から導かれる．よって (i) $\Rightarrow$ (ii) を示す．一意性は補題 2.5 と 2.7 から導けるので，以下では存在性だけを示す．

V_e を $e := T(1)$ によって生成された主イデアルとする．このとき，T は $C(X)$ から V_e への正値線形作用素となり，T の緊密性の条件に現れる有向点列 $\{p_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ も V_e の要素から成ると仮定してよい．

さて V_e はそれ自身 Dedekind 完備な Riesz 空間なので，第 2 章で述べたように，適当なコンパクト Stonean 空間 S が存在して，V_e は $C(S)$ と束同型となる．結局，$V = C(S)$ の場合に μ の存在性を示せばよい．

κ を S 上の Birkhoff-Ulam $C(S)$-値 σ-測度とする．$\tilde{T} : B(X) \to B(S)$ を命題 3.1 で与えられた T の拡張とする．各 $A \in \mathcal{B}(X)$ に対して $\mu(A) := \int_A \tilde{T}(\chi_A) d\kappa$ とおく．このとき，補題 3.2 に注意すると，μ は X 上の $C(S)$-値 σ-測度で，次の 2 つの性質

(a) 任意の $f \in C(X)$ に対して $T(f) = \int_X f d\mu$,

(b) 任意の開集合 $G \subset X$ に対して

$$\mu(G) = \sup\{T(f) : 0 \leq f \leq \chi_G, f \in C(X)\}$$

が成り立つことを示せる．よって，残っている仕事は μ の擬ラドン性を示すことである．そのためには，補題 2.4 より μ が緊密かつ擬正則であることを示せばよい．

T は緊密性の条件を満たすので，0 に単調減少収束する有向点列 $\{p_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma} \subset V$ と X のコンパクト集合から成る有向集合列 $\{K_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ が存在して，任意の $\alpha\in\Gamma$ と $f(K_\alpha)=\{0\}$ 及び $0\le f\le 1$ を満たす任意の $f\in C(X)$ に対して $T(f)\le p_\alpha$ が成り立つ．よって，性質 (b) より

$$\mu(X-K_\alpha)=\sup\{T(f):0\le f\le \chi_{X-K_\alpha}, f\in C(X)\}\le p_\alpha$$

が任意の $\alpha\in\Gamma$ に対して成り立つ．ゆえに μ は緊密となる．

次に μ の擬正則性を示す．G は X の開集合とし，$f\in C(X)$ は $0\le f\le\chi_G$ を満たすとする．また，各 $n\in\mathbb{N}$ に対して $F_n:=\{x\in X: f(x)\ge 1/n\}$ とおくと，$\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は X の閉部分集合から成る単調増加列で，$\cup_{n=1}^{\infty}F_n=\{x\in X: f(x)>0\}\subset G$ を満たす．よって

$$T(f)=\int_X f\,d\mu\le\mu(\cup_{n=1}^{\infty}F_n)=\sup_{n\in\mathbb{N}}\mu(F_n)$$

となり，

$$T(f)\le\sup\{\mu(F):F\subset G \text{ and } F \text{ is closed}\}\le\mu(G)$$

が得られる．ゆえに，μ は擬正則となり証明が完結する．

注意 3.5. 定理 3.4 を証明するのに，いわゆる Daniell の方法を用いて正値線形作用素 $T:C(X)\to V$ から V-値 σ-測度 μ を構成するのは不可能であることが [12] で指摘されている．

定理 3.4 で仮定した緊密性の条件は，X がコンパクトの場合は自動的に満たされる．それゆえ，V が Dedekind 完備な Riesz 空間の場合には定理 3.4 は [12, Theorem 4.1] や [14, Theorem 4.5] を含んでいる．また，定理 3.4 の応用として

- 完全正則空間上の擬ラドンな Riesz 空間値 Borel σ-測度の Borel 直積測度の存在性と一意性．
- Riesz 空間値ベクトル測度からなる集合の測度の弱収束に関する点列コンパクト性判定定理 (Prokhorov-LeCam の点列コンパクト性判定条件の拡張)

などが得られるが，これらについては別の機会に発表の予定である．

参考文献

[1] C. D. Aliprantis and O. Burkinshaw, *Positive operators*, Academic Press, Orlando, 1985.

[2] A. Boccuto and A. R. Sambucini, *The monotone integral with respect to Riesz space-valued capacities*, Rend. Mat. (Roma), Ser. VII **16** (1996), 255–278.

[3] J. Diestel and J. J. Uhl, Jr., *Vector measures*, Amer. Math. Soc. Surveys No. 15, Amer. Math. Soc., Providence RI, 1977.

[4] N. Dinculeanu, *Vector integration and stochastic integration in Banach spaces*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2000.

[5] E. E. Floyd, *Boolean algebras with pathological order topologies*, Pacific J. Math. **5** (1955), 687–689.

[6] J. Kawabe, *Joint continuity of injective tensor products of vector measures in Banach lattices*, J. Aust. Math. Soc. Ser. **74** (2003), 185–199.

[7] ———, *The portmanteau theorem for Dedekind complete Riesz space-valued measures*, to appear in Nonlinear analysis and convex analysis (Tokyo, 2003), Yokohama Publishers, Yokohama.

[8] ———, *Uniformity for weak order convergence of Riesz space-valued measures*, submitted for publication.

[9] I. Kluvánek and G. Knowles, *Vector measures and control systems*, North Holland, Amsterdam, 1975.

[10] W. A. J. Luxemburg and A. C. Zaanen, *Riesz spaces* I, North-Holland, Amsterdam, 1971.

[11] H. H. Schaefer, *Banach lattices and positive operators*, Springer, Berlin, 1974.

[12] J. D. M. Wright, *Stone-algebra-valued measures and integrals*, Proc. London Math. Soc. **19** (1969), 107–122.

[13] ———, *Vector lattice measures on locally compact spaces*, Math. Z. **120** (1971), 193–203.

[14] ———, *Measures with values in a partially ordered vector space*, Proc. London Math. Soc. **25** (1972), 675–688.

[15] ———, *Products of positive vector measures*, Quart. J. Math. Oxford **24** (1973), 189–206.

[16] A. C. Zaanen, *Introduction to operator theory in Riesz spaces*, Springer, Berlin, 1997.

Department of Mathematics
Faculty of Engineering
Shinshu University
4-17-1 Wakasato, Nagano 380-8553, Japan
E-mail address: jkawabe@shinshu-u.ac.jp
E-mail address: yamono224@yahoo.co.jp